

# A IMPORTÂNCIA DA NOÇÃO DE FUNÇÃO HOMOGÉNEA

HÉLIO BERNARDO LOPES<sup>1</sup>

**Resumo.** O conceito de função homogénea está presente desde o início dos cursos de licenciatura que contemplam nos seus planos de estudos disciplinas de Análise Matemática. Trata-se de um conceito simples, facilmente dominável, embora o mesmo não seja suficientemente aprofundado, estando ausentes muitas das suas ligações com outros domínios da Matemática e da Física, que surgem no seio de outras disciplinas.

Um dos domínios cuja apresentação e desenvolvimento requer o conhecimento de quanto envolve o conceito de função homogénea, é o da Análise Dimensional, estruturada a partir dos primórdios do Século XIX, e que serve de suporte à Teoria da Semelhança, à luz de cuja doutrina se estabelecem os critérios de semelhança e as correspondentes relações, que são temas absolutamente essenciais no ensaio de estruturas diversas por recurso a modelos reduzidos.

A noção de função homogénea surge logo no primeiro ano dos cursos de licenciatura onde uma disciplina de Análise Matemática esteja presente.

Tal como é apresentada, trata-se de uma noção simples, de fácil apreensão e dominância, embora, de um modo quase geral, a referida noção não seja suficientemente aprofundada, nem se mostrem algumas das suas importantes ligações a outros domínios da Matemática e da Física Aplicadas, e que surgem no seio de outras disciplinas de certos cursos de licenciatura.

Um dos domínios cuja apresentação e desenvolvimento requer o conhecimento de quanto gira ao redor da noção de função homogénea, é o da Análise Dimensional, cuja estruturação teve o seu início nos primórdios do Século XIX, que é a estrutura que serve de suporte à Teoria da Semelhança, sob cuja doutrina se estabelecem os critérios de semelhança e as correspondentes relações, temas absolutamente omnipresentes e essenciais no ensaio de estruturas diversas através de modelos reduzidos.

Note-se, contudo, que o domínio da Análise Dimensional tem também aplicação em áreas como a Economia, e até a Sociologia e a Psicologia.

Seja, então, a função,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $k_i \in \mathbf{R}$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ . Diz-se que **f** é **incondicionalmente homogénea** se e só se:

$$\underbrace{f(k_1x_1, \dots, k_nx_n)}_{(1)} = \underbrace{g(k_1, \dots, k_n)}_{(1)} \cdot f(x_1, \dots, x_n).$$

À função  $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , dá-se o nome de **factor de homogeneidade**.

Admite-se, claro está, que  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(k_1x_1, \dots, k_nx_n)$  pertencem ao domínio de  $f$ ,  $D_f \subseteq \mathbf{R}^n$ , e que  $(k_1, \dots, k_n) \in D_g \subseteq \mathbf{R}^n$ .

Em contrapartida, se (1) só for válida no domínio definido por certas condições nos coeficientes  $k_i$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ , **f diz-se condicionalmente homogénea**.

---

<sup>1</sup> Antigo Professor e Membro do Conselho Científico da Escola Superior de Polícia.

Pode demonstrar-se facilmente que toda a função,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , que seja **um monómio** do tipo:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \times \dots \times x_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

com  $\alpha_i \in \mathbf{R}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), **é uma função incondicionalmente homogénea**, sendo o correspondente factor de homogeneidade:

$$g(k_1, \dots, k_n) = k_1^{\alpha_1} \times \dots \times k_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n k_i^{\alpha_i}$$

com  $k_i \in \mathbf{R}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ).

Pode, porém, ir-se mais longe, tendo presente que **qualquer função contínua em certo domínio**, que seja aí **incondicionalmente homogénea**, **é necessariamente um monómio**.

Assim, por exemplo, a função,  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^3 x_3^2$$

é uma função incondicionalmente homogénea, dado ser um monómio e contínua no seu domínio. O correspondente factor de homogeneidade é:

$$g(k_1, k_2, k_3) = k_1 k_2^3 k_3^2.$$

No caso de se estar perante uma função condicionalmente homogénea,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

em que as condições nos parâmetros  $k_i \in \mathbf{R}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), são do tipo monomial, e nos termos do sistema que se apresenta a seguir:

$$(2) \begin{cases} k_{m+1} & = & k_1^{\alpha_{11}} \times \dots \times k_m^{\alpha_{m1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{m+p} & = & k_1^{\alpha_{1p}} \times \dots \times k_m^{\alpha_{mp}} \end{cases}$$

com  $m + p = n$ ,  $k_i \in \mathbf{R}$ , ( $i = 1, \dots, m$ ), a função  $f$  pode escrever-se na forma:

$$\underbrace{f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{k_1} \times \dots \times x_m^{k_m} \cdot g\left(\frac{x_{m+1}}{x_1^{\alpha_{11}} \times \dots \times x_m^{\alpha_{m1}}}, \dots, \frac{x_{m+p}}{x_1^{\alpha_{1p}} \times \dots \times x_m^{\alpha_{mp}}}\right)}_{(3)}$$

Os expoentes,  $\alpha_{ij}$ , ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, p$ ), assumem os valores reais adequados a tornar cada uma das expressões:

$$\frac{x_{m+j}}{x_1^{\alpha_{1j}} \times \dots \times x_m^{\alpha_{mj}}}$$

num monómio homogéneo, ( $m = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, p$ ).

Como é evidente, nas expressões anteriores, para a função  $f$  como para a função  $g$ , supõe-se sempre que estas funções estão definidas nos pontos considerados.

E, tal como já se referiu para o caso incondicionalmente homogéneo, também a expressão (3) define  $f$  como uma função homogénea, qualquer que seja a função  $g$ , desde que as condições nos parâmetros,  $k_i \in \mathbf{R}$ , sejam as dadas pelo sistema (2).

Ora, o que se disse até aqui para uma função,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , pode estender-se ao caso de uma equação com  $n \in \mathbf{N}$  incógnitas:

$$\underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{(4)} = 0.$$

Assim, diz-se que (4) é uma **equação incondicionalmente homogénea** se se tiver:

$$f(k_1 x_1, \dots, k_n x_n) = 0$$

com  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(k_1 x_1, \dots, k_n x_n)$  pertencentes a  $D_f \subseteq \mathbf{R}^n$ , e  $k_i \in \mathbf{R}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), quaisquer.

Ao invés, se os parâmetros  $k_i$  satisfizerem a certas condições, (4) diz-se uma **equação condicionalmente homogénea**.

No caso em que a equação (4) permite explicitar a incógnita  $x_n$ , por exemplo, como uma função das restantes:

$$\underbrace{x_n = f_1(x_1, \dots, x_{n-1})}_{(5)}$$

$f_1 : \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D_{f_1} \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ , e  $f_1$  for condicionalmente homogénea, com as condições nos parâmetros  $k_i \in \mathbf{R}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), dadas pelo sistema abaixo:

$$\begin{cases} k_{m+1} & = & k_1^{\alpha_{11}} \times \dots \times k_m^{\alpha_{m1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{m+p} & = & k_1^{\alpha_{1p}} \times \dots \times k_m^{\alpha_{mp}} \end{cases}$$

com  $m + p = n$ , (5) pode então escrever-se na forma:

$$x_n = x_1^{k_1} \times \dots \times x_m^{k_m} g \left( \frac{x_{m+1}}{x_1^{\alpha_{11}} \times \dots \times x_m^{\alpha_{m1}}}, \dots, \frac{x_{m+p-1}}{x_1^{\alpha_{1,(p-1)}} \times \dots \times x_m^{\alpha_{m,(p-1)}}} \right).$$

Como se salientou logo ao início, o conceito de função homogénea é essencial no tratamento da Análise Dimensional, dado manusearem-se neste domínio grandezas onde é essencial definir-se uma relação de igualdade, bem como a operação de adição dos seus valores, de molde que aquela relação e esta operação sejam independentes do sistema de unidades que esteja a ser utilizado.

Nada impede, contudo, que se considerem os parâmetros  $k_i \in \mathbf{R}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), como sendo um único - seja  $t \in \mathbf{R}^-$ , dizendo-se, então, que a função,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , é homogénea se e só se:

$$\underbrace{f(tx_1, \dots, tx_n)}_{(6)} = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$$

onde se supõe que  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(tx_1, \dots, tx_n)$  pertencem ao domínio de  $f$ ,  $D_f \subseteq \mathbf{R}^n$ , e onde  $\alpha \in \mathbf{R}$ . À função  $t^\alpha$  dá-se a designação de factor de homogeneidade, designando a constante real,  $\alpha$ , por **grau de homogeneidade** da função  $f$ .

Esta **função** dir-se-á **positivamente homogénea** de grau de homogeneidade  $\alpha$ , se (6) for válida apenas para valores de  $t \in \mathbf{R}_0^+$ . Como é evidente, uma função homogénea é positivamente homogénea, mas a recíproca não é verdadeira.

Note-se que, se em (6) se proceder à mudança de variável:

$$t = \frac{1}{x_1}$$

virá:

$$\underbrace{f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)}_{(7)} = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{x_1^\alpha}$$

ou seja:

$$\underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{(8)} = x_1^\alpha \cdot g\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

com  $g : \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$  e com:

$$x_1 \neq 0 \quad \wedge \quad \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) \in D_g.$$

Como é evidente, qualquer que seja o sistema de unidades com que se esteja a trabalhar no âmbito do estudo de certo fenómeno, os quocientes:

$$\frac{x_i}{x_1} \quad \wedge \quad (i = 1, \dots, n) \quad \wedge \quad x_1 \neq 0$$

são funções homogéneas, tal como com as restantes funções que aparecem em (8).

No caso de existirem as primeiras derivadas parciais de uma função  $f(x_1, \dots, x_n)$ , que seja homogénea de grau  $\alpha$ , cada uma dessas derivadas parciais é ainda uma função homogénea, mas de grau  $\alpha - 1$ . E se existirem as derivadas parciais de ordem  $k$ , ( $k = 1, \dots, n$ ), elas serão, por igual, homogéneas de grau  $\alpha - k$ .

Por fim, saliente-se que, sendo,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , uma função positivamente homogénea de grau de homogeneidade,  $\alpha$ , se tem a importante **Identidade de Euler**, desde que existam as primeiras derivadas parciais da função dada:

$$\underbrace{x_1 f'_{x_1} + \dots + x_n f'_{x_n}}_{(9)} = \alpha \cdot f$$

ou, de modo mais sintético:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i f'_{x_i}}_{(9)} = \alpha \cdot f.$$

A recíproca é, por igual, verdadeira: se certa função,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , for diferenciável e verificar a Identidade de Euler, (9), essa função é positivamente homogénea.

Torna-se facilmente evidente que se certa função assumir a forma de um polinómio nas variáveis,  $x_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), o mesmo será homogéneo de grau  $\alpha \in \mathbf{R}$  se for  $\alpha$  o grau de cada um dos seus monómios, ou seja, se sendo a função da forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

se tiver, para cada monómio:

$$k_1 + \dots + k_n = \alpha.$$

A expressão (7) permite concluir que, se  $f$  é função homogénea de grau de homogeneidade 0, ela depende apenas dos quocientes:

$$\frac{x_i}{x_1} \quad \wedge \quad (i = 2, \dots, n) \quad \wedge \quad x_1 \neq 0$$

entre as suas variáveis:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Toda esta doutrina sobre o conceito de função homogénea, tal como se disse ao início, é requerida na estruturação da Análise Dimensional, pelo que se justificam algumas referências a este domínio.

Como é evidente, quando se procede à medição de certa grandeza mecânica necessita-se de uma unidade como termo de comparação.

Embora as unidades utilizadas na medição das diversas grandezas mecânicas possam ser as mais diversas, e escolhidas independentemente umas das outras, torna-se conveniente deitar mão do que se designa por **sistema coerente de unidades**.

Um tal sistema é constituído por um conjunto de unidades fixadas de modo arbitrário, chamadas **unidades de base** (ou **fundamentais**), e por **unidades derivadas**, cuja definição se faz a partir das primeiras, usando certas fórmulas, a que se dá o nome de **equações de definição**.

Assim, quando se está perante a equação de definição de certa grandeza mecânica, pode acontecer que naquela apenas figurem unidades de base, ou também unidades derivadas, porventura, misturadas com as primeiras. Como é óbvio, contudo, esta última situação acaba sempre por degenerar na primeira.

Se na equação de definição de certa grandeza se substituírem as unidades de base por símbolos que as representem, obtém-se a designada **equação de dimensões** da grandeza em causa. Dado que as equações de definição são sempre expressões monómias, o mesmo acontece com as equações de dimensões.

Como se sabe, o sistema de unidades mecânicas internacionalmente adoptado é o Sistema Internacional de Unidades, SI, que foi adoptado pela 11<sup>a</sup> Conferência Geral de Pesos e Medidas, que teve lugar em Paris, no ano de 1960.

Neste sistema, e no domínio mecânico, as unidades de base são o metro, para o comprimento, o quilograma, para a massa, e o segundo, para o tempo.

As equações de dimensões das diversas grandezas mecânicas vêm, pois, expressas do modo seguinte:

$$[X] = L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

onde L, M e T representam, respectivamente, o comprimento, a massa e o tempo, e onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as dimensões da grandeza X face às grandezas fundamentais no sistema coerente de unidades adoptado, onde as unidades de base são o metro, o quilograma e o segundo.

Neste ponto, há dois teoremas que se impõe apresentar: o **Teorema da Homogeneidade** e o **Teorema dos Parâmetros Adimensionais**<sup>2</sup>.

Veja-se, pois, o

**TEOREMA DA HOMOGENEIDADE**<sup>3</sup>. Em toda a expressão, equação ou fórmula física, teórica ou empiricamente deduzida, as dimensões de todos os seus termos devem ser idênticas. Ou seja, aquela deve ser dimensionalmente homogênea.

Significa isto que, se se igualarem duas expressões da Mecânica, as dimensões das duas expressões têm de ser idênticas. E quando em dada expressão da Mecânica certa grandeza aparece diversas vezes, ela tem de vir expressa, em última análise, nas mesmas unidades de base do sistema de unidades adoptado, ou o mesmo deixaria de ser coerente.

O segundo teorema atrás referido é o

**TEOREMA DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS**<sup>4</sup>. Dado um fenómeno físico qualquer e conhecida uma relação:

$$\underbrace{f(A_1, A_2, \dots, A_n)}_{(10)} = 0$$

entre todas as variáveis, em número de  $n$ , que nele intervêm, se se escolher um sistema de  $m$  grandezas fundamentais, a expressão anterior pode transformar-se numa relação de  $n - m$  parâmetros adimensionais:

---

<sup>2</sup> Também conhecido por **Teorema dos  $\pi$** , ou **Teorema de Vashy-Buckingham**.

<sup>3</sup> O enunciado que se apresenta é o que se contém em HIDRÁULICA GERAL, Volume I, Alberto Abecasis Manzanares, Técnica, AEIST, 1979.

<sup>4</sup> O enunciado que se apresenta é o que se contém em HIDRÁULICA GERAL, Volume I, Alberto Abecasis Manzanares, Técnica, AEIST, 1979.

$$\underbrace{\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0}_{(11)}$$

em que cada parâmetro contém  $m + 1$  variáveis, somente uma das quais muda de parâmetro para parâmetro, sendo as outras  $m$  as tomadas para fundamentais.

Se se admitir um sistema como o internacionalmente adoptado, existem, como se sabe, três grandezas fundamentais. Designem-se essas grandezas por  $A_l$ ,  $A_m$  e  $A_t$ , e suponha-se que estas grandezas são três das que figuram em (10).

Nestas circunstâncias, (11) terá  $n - 3$  parâmetros adimensionais, cada um dos quais é um monómio homogêneo de grau de homogeneidade 0.

Cada um desses monómios homogêneos e adimensionais será do tipo:

$$\pi_i = \frac{A_i}{A_l^{\alpha_i} A_m^{\beta_i} A_t^{\gamma_i}}$$

onde  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  e  $\gamma_i$  são as dimensões da grandeza  $A_i$  tomadas em relação às três unidades de base,  $A_l$ ,  $A_m$  e  $A_t$ , respectivamente.

Estes parâmetros,  $\pi_i$ , em número de  $n - 3$ , tomam a designação de **números índices**<sup>5</sup> do fenómeno em estudo. Assim, se depois de bem analisado se decidir que certo fenómeno físico depende de cinco grandezas mecânicas, o seu estudo teria de fazer-se através do do efeito de cada uma dessas grandezas, com as restantes tomadas constantes. Uma tal tarefa seria, naturalmente, cansativa.

Contudo, se se tomarem três dessas grandezas para fundamentais, ser-se-á conduzido de uma situação inicial do tipo:

$$f(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = 0$$

para uma outra da forma:

$$\underbrace{\varphi(\pi_1, \pi_2) = 0}_{(12)}$$

onde se tem:

$$\pi_1 = \frac{A_1}{A_3^{\alpha_1} A_4^{\beta_1} A_5^{\gamma_1}} \quad \wedge \quad \pi_2 = \frac{A_2}{A_3^{\alpha_2} A_4^{\beta_2} A_5^{\gamma_2}}.$$

Passa, pois, através de (12), a dispor-se de uma equação com apenas dois números índices,  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . Realizando ensaios diversos do fenómeno em estudo, obtém-se um conjunto de pares ordenados do tipo,  $(\pi_1, \pi_2)$ , que podem representar-se num sistema de dois eixos cartesianos ortogonais.

Só numa situação de verdadeira raridade se encontrará uma relação causal do tipo:

$$\pi_1 = g(\pi_2)$$

<sup>5</sup> Também designados **parâmetros característicos** do fenómeno.

pelo que o que haverá a fazer será adaptar uma relação funcional,  $\phi$ , que minimize os desvios em relação aos pares ordenados,  $(\pi_1, \pi_2)$ , que será, pois, a considerada como representando o fenómeno em estudo.

Essa relação, será, pois:

$$\pi_1 = \phi(\pi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_3^{\alpha_1} A_4^{\beta_1} A_5^{\gamma_1}} = \phi\left(\frac{A_2}{A_3^{\alpha_2} A_4^{\beta_2} A_5^{\gamma_2}}\right)$$

ou seja:

$$A_1 = A_3^{\alpha_1} A_4^{\beta_1} A_5^{\gamma_1} \phi\left(\frac{A_2}{A_3^{\alpha_2} A_4^{\beta_2} A_5^{\gamma_2}}\right).$$

Fica assim exposto o conceito de função homogénea, através de um conjunto vasto de definições e propriedades, mas também a referência à sua presença no estudo da Análise Dimensional, que se projecta, como se disse ao início, na Teoria da Semelhança e nas suas aplicações à construção de modelos reduzidos, onde tem de deitar-se mão de critérios de semelhança. Ora, uma condição essencial para que haja semelhança, à luz de certo critério, entre protótipo e modelo, é que os números índices correspondentes, para cada grandeza, sejam iguais no protótipo e no modelo.

Pôde, pois, mostrar-se que o conceito de função homogénea é, afinal, bem mais rico e útil do que a uma primeira vista poderá depreender-se da doutrina normalmente apresentada nas disciplinas de Matemática onde é tratado.

## BIBLIOGRAFIA

AGUDO, F. R. Dias (1989): *Análise Real, Volume I*, Escolar Editora, Lisboa.

ALMEIDA, Guilherme de (1988): *Sistema Internacional de Unidades (SI). Grandezas e Unidades Físicas. Terminologia, Símbolos e Recomendações*, Plátano Editora, SA.

BAU, João (1974): *Teoria da Análise Dimensional e da Semelhança Física - Aplicação aos Modelos Hidráulicos e aos Modelos Aerodinâmicos*, Tese apresentada a concurso para especialista do LNEC, Ministério das Obras Públicas, Lisboa.

MANZANARES, Alberto Abecasis (1979): *Hidráulica Geral. I - Fundamentos Teóricos*, Técnica, AEIST, Lisboa.

MENDONÇA, P. de Varennes e (1976-1977): *Apostamentos de Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas*, 9ª Edição ciclostilada, Instituto Superior de Agronomia, Lisboa.

QUINTELA, António de Carvalho (1981): *Hidráulica*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.